Tanım : Olasılıkta Yakınsama:

$n \in \mathbb{N}$ için X_n rasgele değişkenlerinin herhangi dizisi olsun.

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

duyorsa X_n rasgele değişken dizisi X rasgele değişkenine olasılıkta yakınsıyor denir. Ve

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

şeklinde gösterilir.

X_n, $n = 1, 2, \dots$ beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 olan aynı dağılımlı rasgele değişkenler olsun. $n \to \infty$ için örneklem ortalaması kitle ortalamasına olasılıkta yakınsar.

$$n \to \infty, \quad \overline{X_n} \xrightarrow{P} \mu \quad , \quad \overline{X_n} = \mu + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{0p}$$

Benzer şekilde örneklem varyansı da kitle varyansına olasılıkta yakınsar.

$$n \to \infty, \quad S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

* Bu ifadeye zayıf büyük sayılar kanunu denir.

Teorem : Merkezi Limit teoremi:

$X_1, \dots, X_n$ beklenen değeri μ, varyans σ^2 olan bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. Rasgele değişkenlerin MGF si sıfır noktası komşuluğunda varsa, $n \to \infty$

$$n \to \infty \quad \frac{(\overline{X_n} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

, ort. standartlaştırma $N(0,1)$'e yaklaşır.

Sıra İstatistikleri :

İstatistiki veriler incelenirken dağılım hakkında herhangi bir bilgi yoktur. Veri analizine başlamadan önce dağılım hakkında bazı görsel bilgilere başvurulur. Bunlar, histogram, Box-Cox çizimi, normal olasılık grafiği gibi. Bu grafiklerin oluşturulmasında verilerin sıralanmış halinden yararlanılır. Mod, Medyan, yüzdelik, çeyrekler de sıralı verilerden bulunur.

$x_1, \ldots, x_n$, $f(x;\theta)$ o.y.f. olan kitleden örneklem olsun. Bunlar aynı örnek uzayında $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ tanımlıdır.

$$x_{(1)} = Min\{x_1, \ldots, x_n\}$$

$x_{(2)}$ = ikinci en küçük

$\vdots$

$$x_{(n)} = Max\{x_1, \ldots, x_n\}$$

olmak üzere $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ sıralı tahmin edicilerden bahsedilir. Bu istatistiklere sıra istatistikleri denir. Bunlardan,

$R = x_{(n)} - x_{(1)}$ – örneklem genişliği

$$M = \begin{cases} x_{(n+1)/2} , & n\text{-tek} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{(\frac{n}{2})+1}}{2} , & n\text{-çift} \end{cases}$$ – Medyan (Ortanca)

$V = \dfrac{(x_{(1)} + x_{(n)})}{2}$, uzunluk ortası

sıra ist. tanımlanır.

Dağılım fonk. $F(x)$, o.y.f / o.f. $f(x)$ olan kitleden $X_1, \ldots, X_n$ örneklem olsun. Bu örneklemin sıra ist. $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ olsun.

a.) $X_{(j)}$ t.d. nin o.y.f. si $x \in D_x$ için

$$\boxed{f_{X_{(j)}}(x) = \underbrace{\binom{n}{j}}_{\frac{n!}{(j-1)!\cdot(n-j)!}} \cdot f(x) \cdot [F(x)]^{j-1} \cdot [1-F(x)]^{n-j}}$$

b.) $X_{(i)}$ ve $X_{(j)}$ t.d. lerin o.o.y.f. si $x<y$

$$\boxed{f_{X_{(i)},X_{(j)}}(x,y) = \frac{n!}{(i-1)!\cdot(j-i-1)!\cdot(n-j)!} \cdot f(x) \cdot f(y) \cdot [F(x)]^{i-1} \cdot [F(y)-F(x)]^{j-i-1} \cdot [1-F(y)]^{n-j}}$$

c.) $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ t.d. lerin o.o.y.f. de

$$\boxed{f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i) & ; x_1 < x_2 < \ldots < x_n \\ 0 & , \text{d.h.} \end{cases}}$$

Örnek.6.4.2: $X_1, \ldots, X_n$, $U(0,\theta)$ dağılımda bir örneklem. Yani

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & , 0<x<\theta \\ 0 & , \text{d.h.} \end{cases} \quad , \quad F(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{x}{\theta} & , 0 \le x < \theta \\ 1 & , x > \theta \end{cases}$$

a.) $X_{(n)}$ sıra ist. o.y.f. si (a) 'dan

$j=n$ $\quad f_{X_{(n)}}(x,\theta) = \binom{n}{n} \cdot f(x) \cdot [F(x)]^{n-1} \cdot [1-F(x)]^{n-n}$

$$= \frac{n!}{(n-1)!\cdot(n-n)!} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{0}$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot x^{n-1} \quad , \quad 0<x<\theta$$

olur.

Bu sonucu, dağılım fonk. ile de bulunur.

$$F_{X(n)}(x) = p(X(n) \leq x) = p(\max(x_1, \dots, x_n) \leq x)$$
$$= p(X_1 \leq x, \dots, \cancel{X}_n \leq x)$$
$$= p(X_1 \leq x) \dots p(X_n \leq x) \longrightarrow \text{aynı dağılımlı}$$
$$= [p(X_1 \leq x)]^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow f_{X(n)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} F(x)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^n}{\theta^n}\right) = \frac{n}{\theta^n} \cdot x^{n-1} \text{ olur.}$$

$$E(X_{(n)}) = \int_0^\theta x \cdot f_{X(n)}(x) \, dx = \int x \cdot \frac{n}{\theta^n} \cdot x^{n-1} \, dx$$
$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \int x^n \, dx = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta = \frac{n}{(n+1)} \cdot \theta \;//$$

$$E(X^2_{(n)}) = \int_0^\theta x^2 \cdot f_{X(n)}(x) \, dx = \int x^2 \cdot \frac{n}{\theta^n} \cdot x^{n-1} \, dx$$
$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+2} \cdot \theta^2 \;//$$

$$\Rightarrow V(X_{(n)}) = \frac{n}{n+2} \cdot \theta^2 - \left[\frac{n}{n+1} \cdot \theta\right]^2$$
$$= \frac{n \cdot \theta^2}{n+2} - \frac{n^2 \cdot \theta^2}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{(n+1)^2 \cdot n\theta^2 - n^2\theta^2 \cdot (n+2)}{(n+2) \cdot (n+1)^2} = \frac{n \cdot \theta^2 \cdot \overbrace{[(n+1)^2 - n \cdot (n+2)]}^{=1}}{(n+2) \cdot (n+1)^2}$$
$$= \frac{n \cdot \theta^2}{(n+2) \cdot (n+1)^2} \;//$$